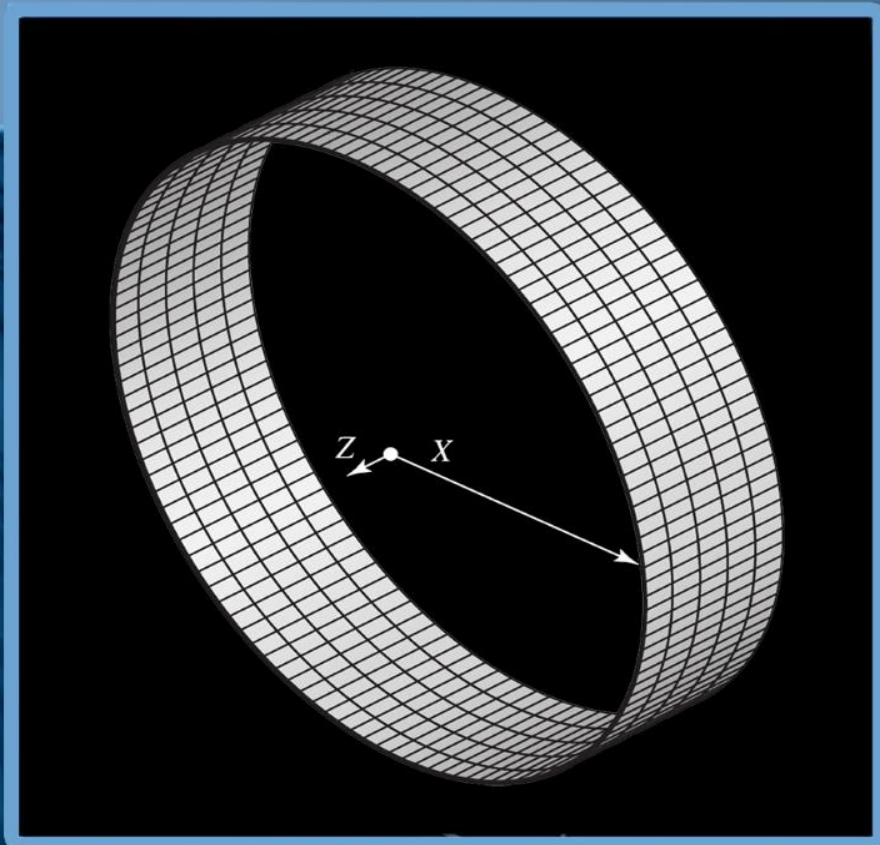


فصل هفتم



توابع درونیاب

مبانی تحلیل اجزاء محدود، تألیف دیوید هاتن، ترجمه شهاب الدین حاتمی و همکاران
مرجع اصلی:

فهرست مطالب

❖ مقدمه

❖ الزامات سازگاری و تمامیت

❖ فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی

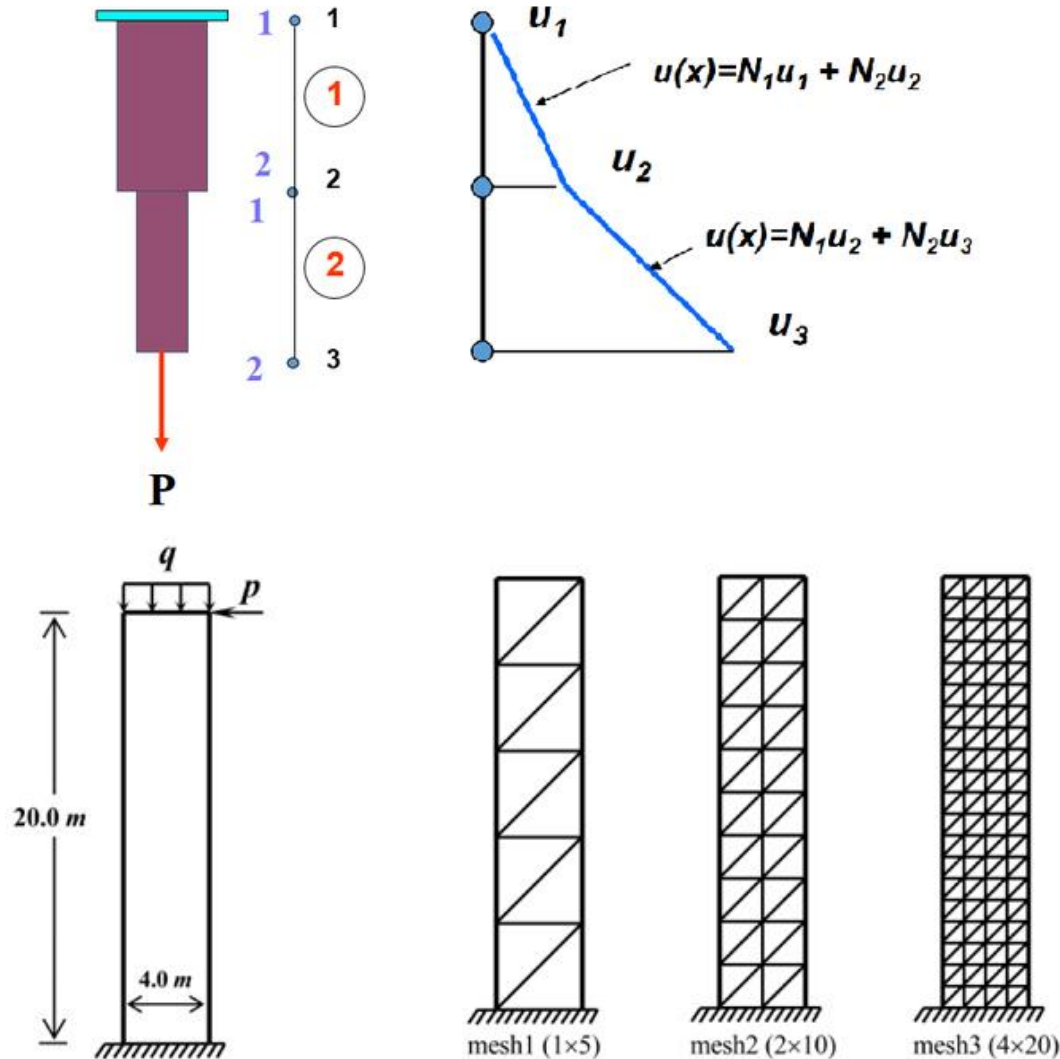
❖ فرم های چند جمله ای: همسانی هندسی

❖ المان های مثلثی

❖ المان های مستطیلی

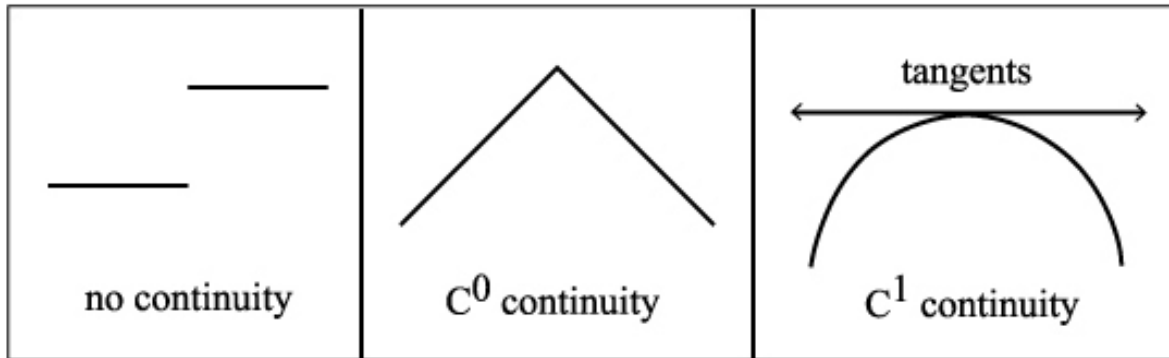
❖ المان های سه بعدی

مقدمه

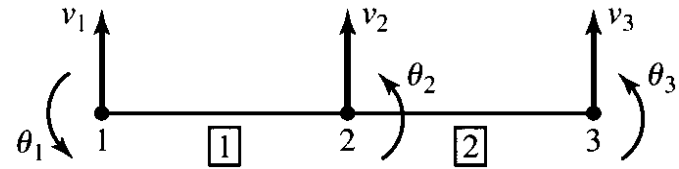
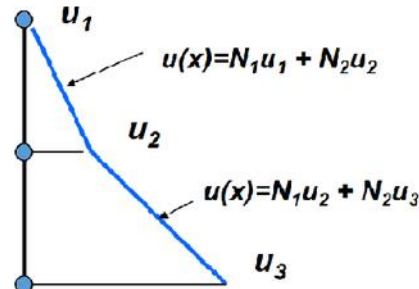
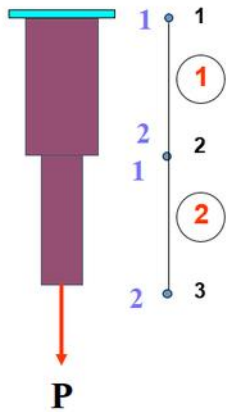


مفهوم پیوستگی

در مسئله‌ای با پیوستگی C^n ، مشتقات متغیر میدانی تا مشتقات مرتبه n ام در سراسر مرزهای المان پیوسته هستند.



پیوستگی

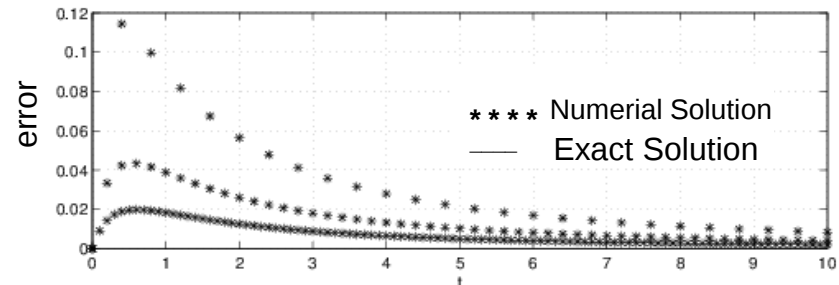
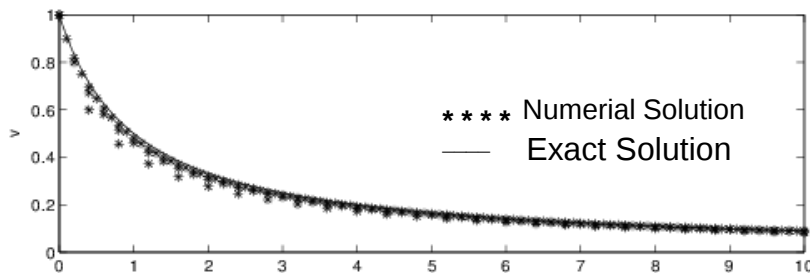


✓ توابع درونیاب المان **میله** دوگرهی و المان صفحه ای کرنش ثابت پیوستگی C^0 دارند. یعنی در سراسر مرزهای المان فقط مشتق تا مرتبه صفر متغیر میدانی (خود متغیر میدانی) پیوسته هست.

✓ المان **تیر** پیوستگی C^1 دارد، زیرا مشتق اول جابجایی عرضی (یعنی شیب) در سراسر مرزهای این المان پیوسته است.

همگرایی

- همگرایی (Convergence): یک حل گسسته از یک معادله دیفرانسیل همگرا گفته می شود اگر هنگامی که نقاط گسستگی کوچک و کوچکتر می شوند به حل دقیق معادله پیوسته نزدیک شود.
- اگر همگرایی حاصل نشود، مهندس با استفاده از روش اجزاء محدود نمی تواند به طور دقیق راجع به این که نتیجه حاصله بیانگر تقریب درستی برای جواب دقیق هست یا خیر، نظر دهد.



همگرایی

➤ در روش اجزای محدود، افزایش دقت جواب و همگرایی با "بهبود مش بندی" المان میسر است.

بهبود نوع **h**
بهبود نوع **p**

روش های بهبود مش بندی

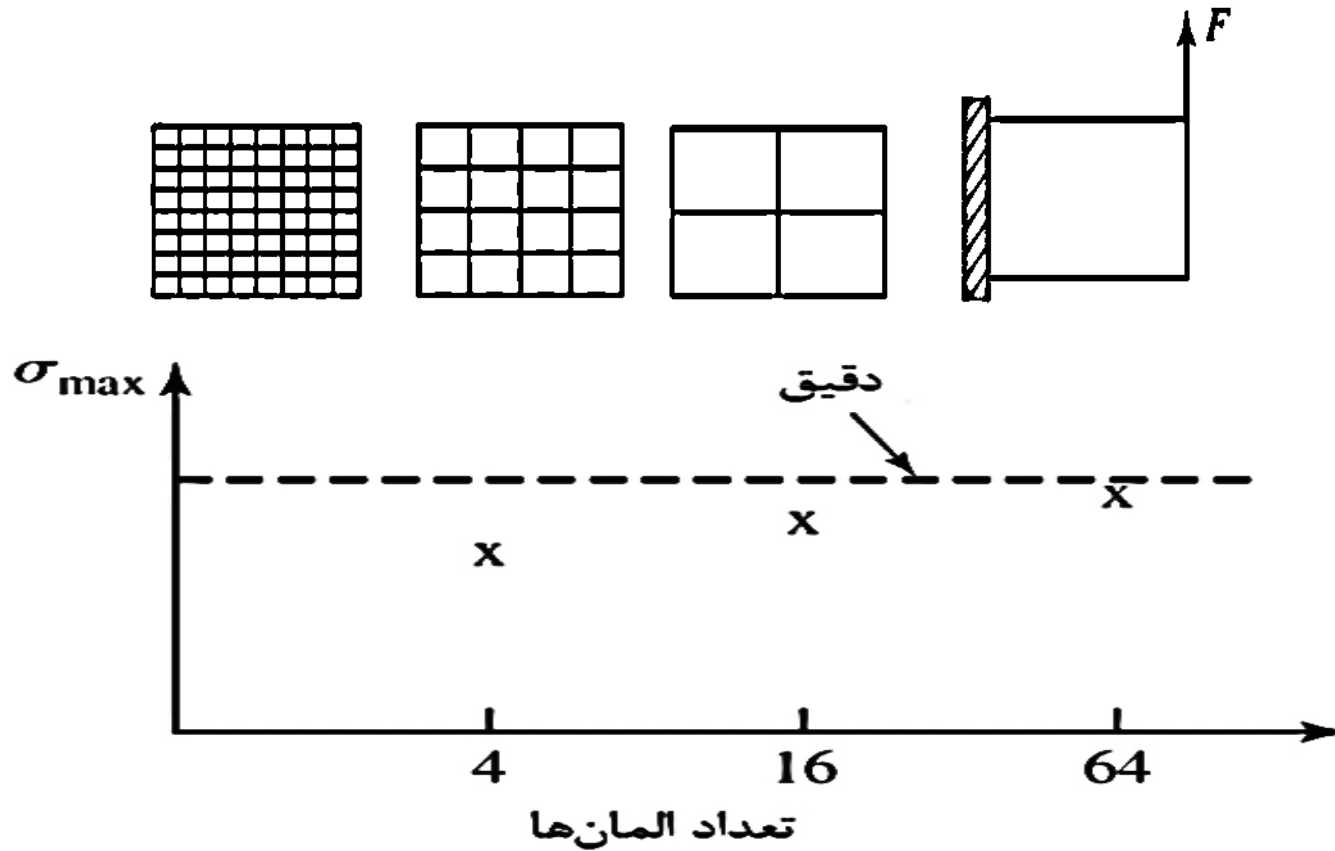
افزایش **تعداد** المان ها
کاهش **اندازه** المان ها

بهبود نوع **h**

افزایش مرتبه چند جمله ای -
های توابع درونیاب

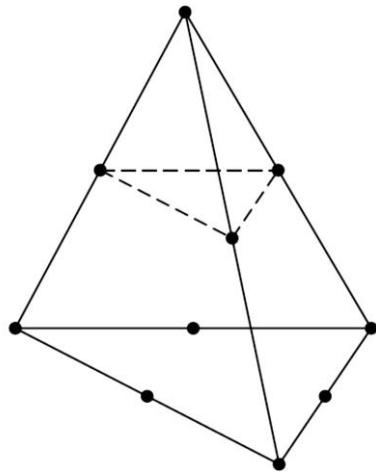
بهبود نوع **p**

همگرایی



همگرایی

برای یک مسئله میدانی در محدوده یک المان که متغیر میدانی به صورت زیر گسسته شده است:



$$\phi^{(e)}_{(x, y, z)} = \sum_{i=1}^M N_{i(x, y, z)} \phi_i$$

توابع درونیاب (توابع شکل) باید دو شرط سازگاری و تمامیت را ارضا کنند تا همگرایی در پی بهبود المان بندی تضمین شود.

سازگاری

✓ برای تحقق سازگاری، در امتداد مرزهای المان، متغیر میدانی و مشتقات جزئی آن تا یک مرتبه کمتر از بیشترین مرتبه مشتق ظاهر شده در فرم انتگرالی معادلات المان، باید پیوسته باشند.

✓ برای مثال برای فرمول‌بندی معادلات المان خریا، مشتق اول جابجایی ظاهر گشت. لذا برای ارضای سازگاری باید جابجایی در سراسر مرزهای المان پیوسته باشد، اما لازم نیست که مشتق جابجایی در این مرزها پیوسته باشد.

$$AE \int_0^L \frac{dN_i}{dx} \frac{du}{dx} dx = N_i AE \frac{du}{dx} \Big|_0^L$$

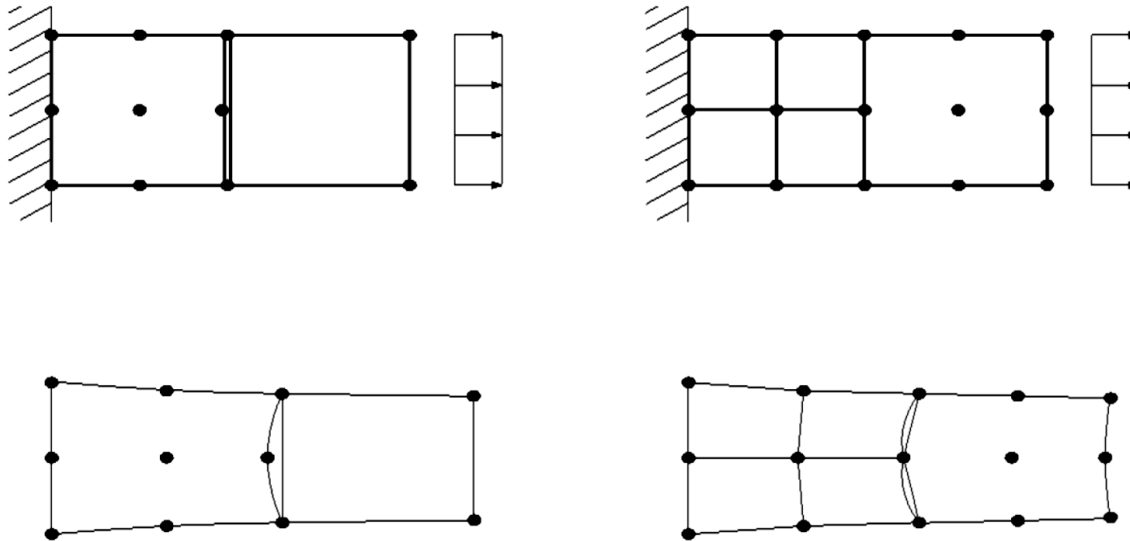
سازگاری

✓ با توجه به فرمول بندی المان تیر که شامل مشتق دوم جابجایی است، برای ارضای شرط سازگاری باید هم جابجایی و هم شیب در مرزهای المان پیوسته باشند.

$$EI_z \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx - N_i EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{dN_i}{dx} EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

سازگاری

✓ شرط سازگاری می‌تواند مفهوم فیزیکی نیز داشته باشد. در مسائل سازه‌ای، شرط پیوستگی جابجایی در امتداد مرزهای المان از ایجاد شکاف یا فضای خالی در سازه در طی روند مدل‌سازی جلوگیری می‌کند.

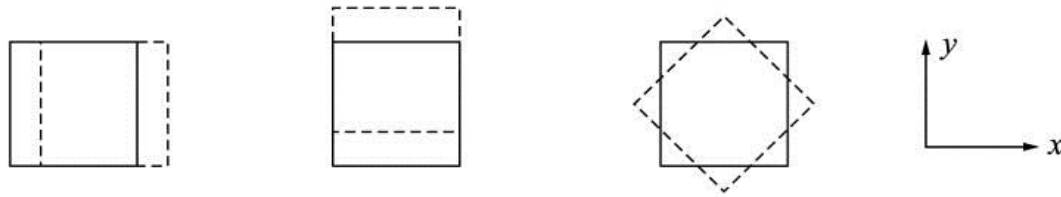


مثالهای عدم تأمین سازگاری

تمامیت

✓ برای تحقق تمامیت، در صورتی که اندازه المان در طی بهبود المان بندی به سمت صفر میل کند، متغیر میدانی و مشتقات جزئی آن تا مرتبه برابر بیشترین مرتبه مشتق ظاهر شده در فرم انتگرالی معادلات المان، باید قادر باشند مقادیر ثابت اختیار کنند.

تمامیت



(a) Rigid-body modes of a plane stress element (from left to right, pure translation in x and y directions and pure rotation)

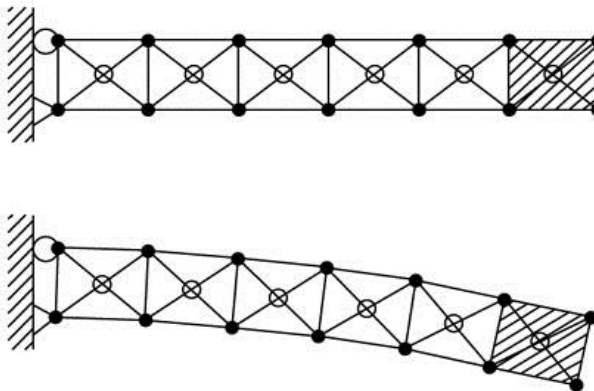
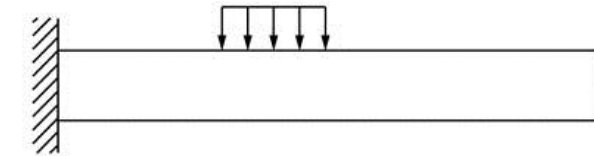
✓ شرط تمامیت برای توابع

تغییر مکان به دنبال

تضمین دو وضعیت است:

□ تحقق کرنش ثابت

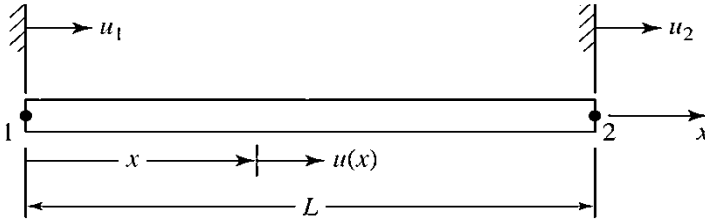
□ تغییر مکان صلب سازه



Rigid-body translation and rotation occurs for elements to right of load

(b) Cantilever beam modeled using constant-strain triangle elements; elements to the right of the loading are stress-free

فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی



میدان جابجایی المان خریا ی دو گرهی:

$$u(x) = a_0 + a_1 x$$

ضرایب a_0 و a_1 با اعمال شرایط گرهی زیر به دست می آیند.

$$u(x = 0) = u_1$$



$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2$$

$$u(x = L) = u_2$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2 = \frac{x}{L}$$

توابع درونیاب :

فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی

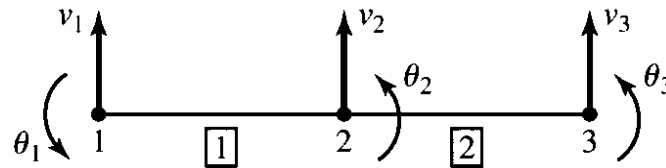
اگر شرط زیر برقرار باشد، میدان جابجایی المان با حرکت جسم صلب متناظر است و کشیدگی یا فشردگی در المان رخ نمی دهد.

$$u_1 = u_2 \quad \longrightarrow \quad u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 = u_1$$

✓ شرط تمامیت در المان خریا ارضا می شود، چرا که هم جابجایی و هم کرنش قطع نظر از اندازه المان می توانند مقدار ثابت اختیار کنند.

✓ المان خریا به صورت خودکار شرط سازگاری را فراهم می کند، زیرا فقط جابجایی مورد بحث است، و سازگاری جابجایی در گره ها به طور حتم از طریق روند مونتاژ سیستم تامین می گردد.

فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی



✓ برای ارضای شرایط سازگاری المان تیر نیاز است که هم جابجایی و هم مشتق اول جابجایی (شیب) در مرزهای المان پیوسته باشند.

✓ وقتی شیبها در گره های المان علاوه بر جابجایی های گرهی به عنوان متغیرهای

گرهی در نظر گرفته شوند، شرط سازگاری از طریق روند مونتاژ سیستم ارضا می-

شود.

فرم‌های چند جمله‌ای: المان‌های یک‌بعدی



میدان جابجایی المان تیر دو گرهی:

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

به دنبال فرم زیر از میدان جابجایی بر حسب توابع درونیاب و متغیرهای گرهی هستیم:

$$\begin{aligned} v(x) &= N_1v_1 + N_2\theta_1 + N_3v_2 + N_4\theta_2 \\ &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

فرم ماتریسی:

$$v(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

شرایط گرهی:

$$v_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\theta_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$v_2 = [1 \quad L \quad L^2 \quad L^3] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\theta_2 = [0 \quad 1 \quad 2L \quad 3L^2] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$v(x=0) = v_1$$

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = \theta_1$$

$$v(x=L) = v_2$$

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} = \theta_2$$

فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی

این چهار رابطه قبل را می توان به صورت ماتریس معادل زیر ترکیب کرد

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

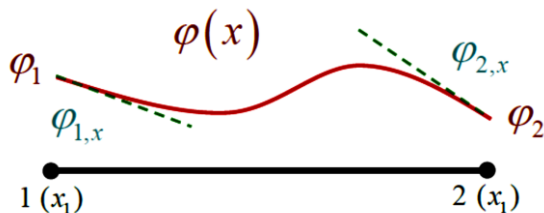
دستگاه ارائه شده را می توان برای به دست آوردن ضرایب چند جمله ای با معکوس کردن ماتریس ضرایب حل نمود:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی

$$v(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



$$\varphi_{1,x} = \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=x_1}, \quad \varphi_{2,x} = \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=x_2}$$

این توابع درونیاب، که پیوستگی C^1 را برآورده می کنند از جمله توابع هرمیتی به شمار می روند.

فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی

عبارت چند جمله ای درجه سوم برای میدان جابجایی برای **المان تیر** به نحوی است که در مشتقات مرتبه اول و دوم حداقل یک متغیر وابسته به مکان ظاهر می شود و تنها مشتق سوم به طور حتم یک مقدار ثابت خواهد داشت.

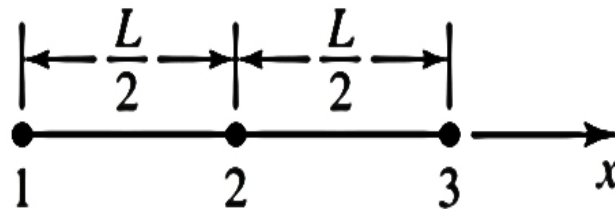
در المانی تحت حرکت جسم صلب، شیبها در گره های المان صفر هستند. مشتق دوم تغییر شکل، که به طور مستقیم با لنگر خمشی متناسب است، صفر است و نیروی برشی که به طور مستقیم با مشتق سوم تغییر شکل متناسب است، ثابت می باشد.

لذا این المان تیر می تواند شرط **تمامیت** را برآورده کند.

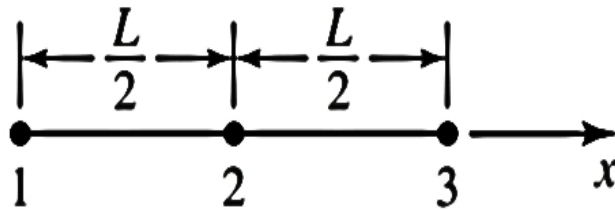
فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی مرتبه بالاتر

یک المان خریای سه گرهی را که در آن گره شماره ۲، گرهی داخلی است، در نظر بگیرید.

وجود **گره داخلی** یک ابزار ریاضی به منظور **افزایش دقت** متغیر میدانی بحساب می آید و به گره دیگری در المان های مجاور متصل نمی شود



فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی مرتبه بالاتر



عبارت چند جمله ای مناسب برای متغیر میدانی این المان به صورت زیر می باشد:

$$\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

و شرایط گرهی:

$$\begin{aligned} \phi(x=0) &= \phi_1 \\ \phi(x=\frac{L}{2}) &= \phi_2 \\ \phi(x=L) &= \phi_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L} & \frac{4}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^2} & -\frac{4}{L^2} & \frac{2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی مرتبه بالاتر

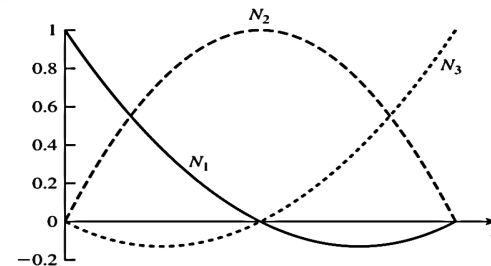
$$\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \phi(x) &= [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ \frac{2}{L} & -\frac{4}{L^2} & \frac{2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$N_1(x) = 1 - \frac{3}{L}x + \frac{2}{L^2}x^2$$

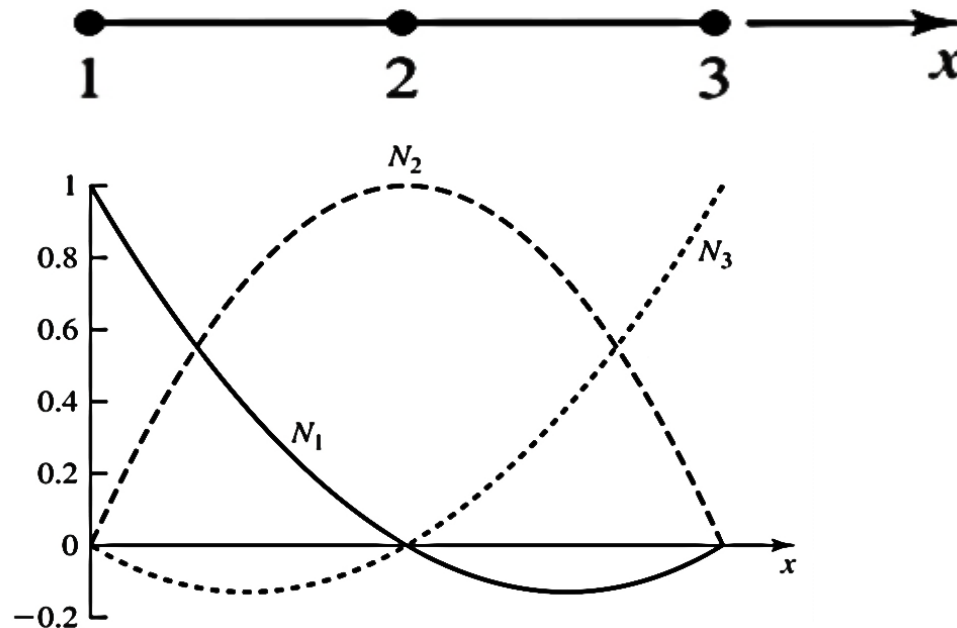
$$N_2(x) = \frac{4x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$N_3(x) = \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 1\right)$$



فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی مرتبه بالاتر

$$N_1(x) = 1 - \frac{3}{L}x + \frac{2}{L^2}x^2$$



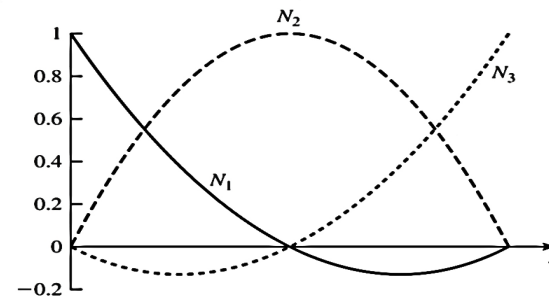
فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی مرتبه بالاتر

$$N_1(s) = C_1(s - s_2)(s - s_3) \quad s = \frac{x}{L} \quad \text{با استفاده از مختصات جدید}$$

کافی است که مقدار C_1 به نحوی تعیین گردد که مقدار تابع در گره ۱ برابر با واحد شود.

$$N_1(s = 0) = 1 = C_1 \left(0 - \frac{1}{2}\right) (0 - 1) \Rightarrow C_1 = 2$$

$$\Rightarrow N_1(s) = 2 \left(s - \frac{1}{2}\right) (s - 1)$$



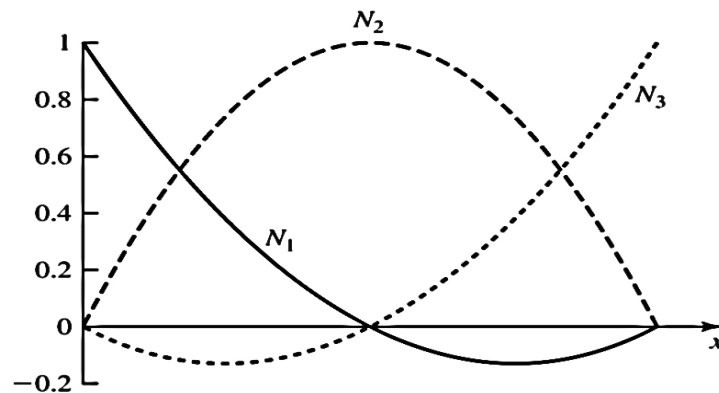
فرم های چند جمله ای: المان های یک بعدی مرتبه بالاتر

با پیروی از یک منطق و روند مشابه می توان نشان داد که

$$N_1(s) = 2 \left(s - \frac{1}{2} \right) (s - 1)$$

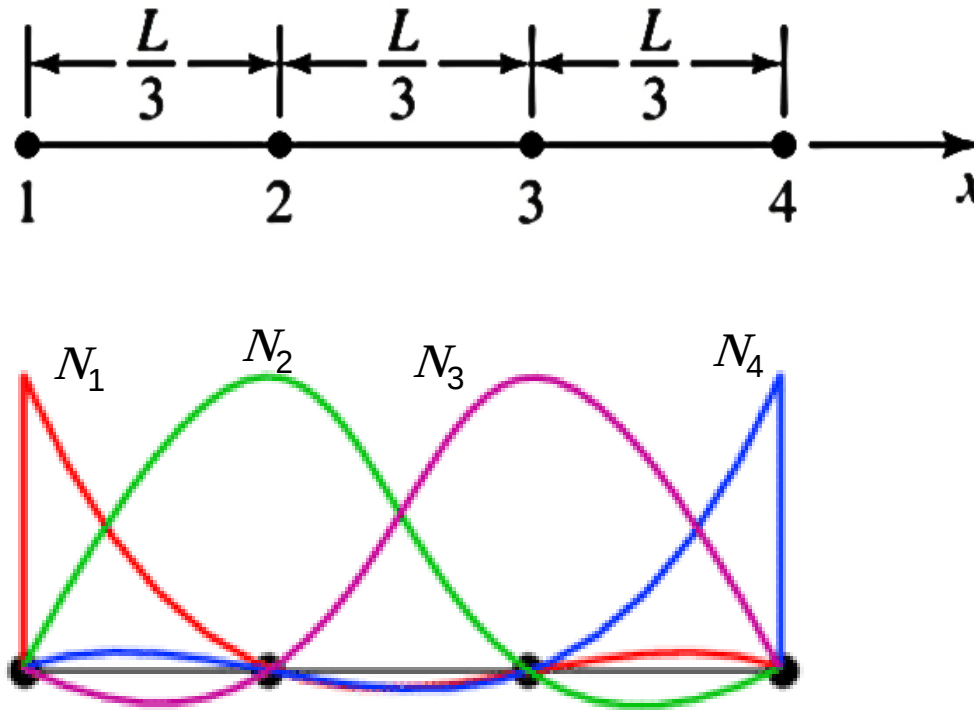
$$N_2(s) = -4s(s - 1)$$

$$N_3(s) = 2s \left(s - \frac{1}{2} \right)$$

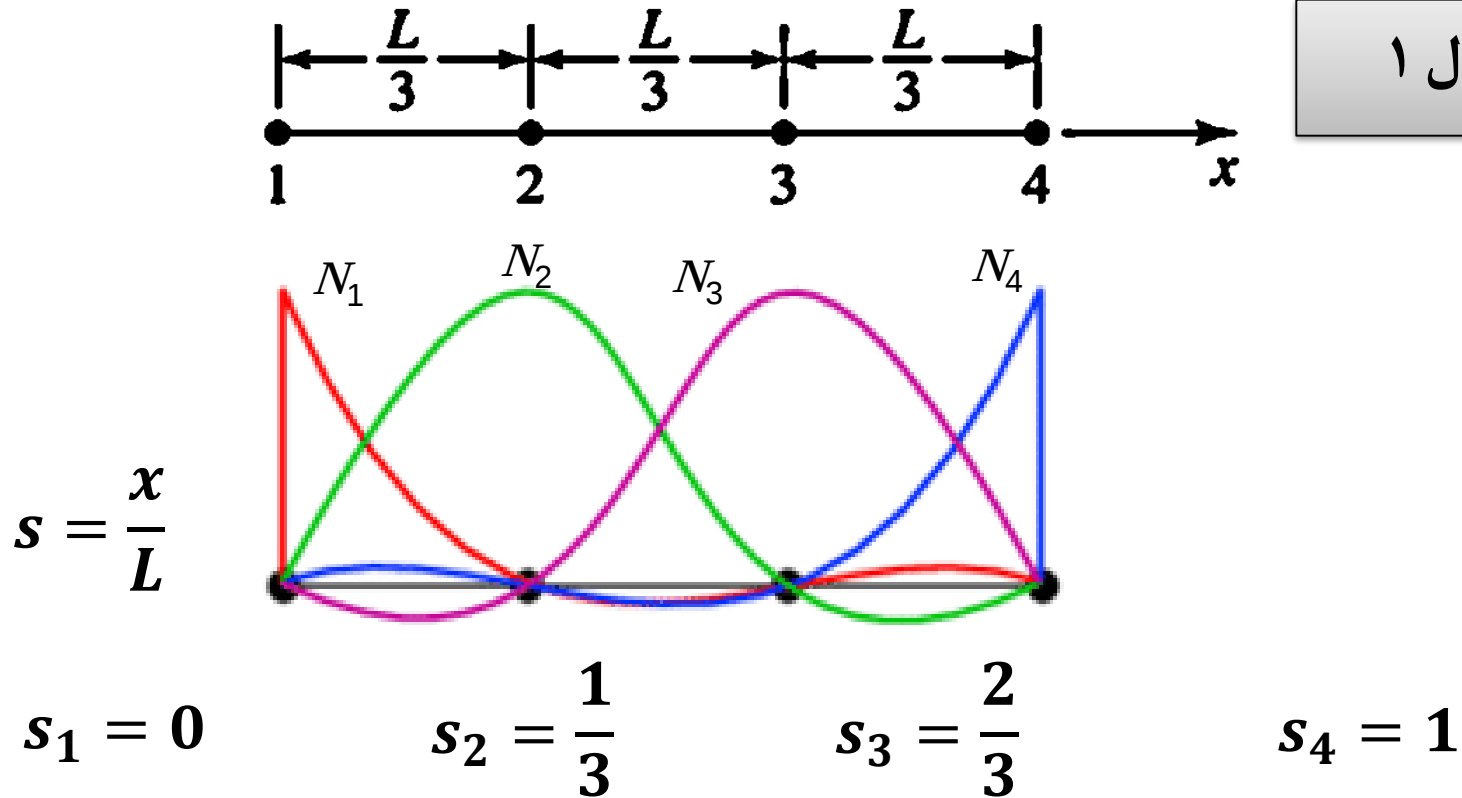


مثال ۱

با استفاده از روش ضرب تک جمله‌ای‌ها، توابع درونیاب المان خطی چهار گرهی نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.



مثال ۱

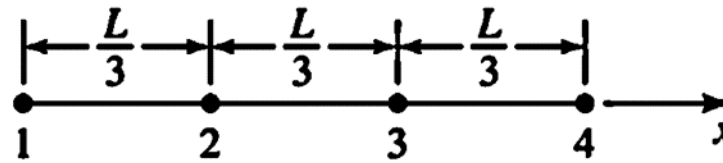


حل

با ضرب تک جمله‌ای‌ها، تابع درونیاب N_1 چنین حاصل می شود:

$$N_1(s) = C_1 \left(s - \frac{1}{3} \right) \left(s - \frac{2}{3} \right) (s - 1)$$

مثال ۱



و بطور مشابه:

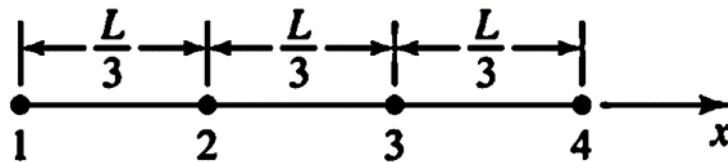
$$N_1(s) = C_1 \left(s - \frac{1}{3} \right) \left(s - \frac{2}{3} \right) (s - 1)$$

$$N_2(s) = C_2 s \left(s - \frac{2}{3} \right) (s - 1)$$

$$N_3(s) = C_3 s \left(s - \frac{1}{3} \right) (s - 1)$$

$$N_4(s) = C_4 s \left(s - \frac{1}{3} \right) \left(s - \frac{2}{3} \right)$$

مثال ۱



با اعمال هر یک از چهار شرط مقدار واحد، نتیجه می شود که:

$$N_1(0) = 1 = c_1 \left(-\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{2}{3} \right) (-1)$$

$$c_1 = -\frac{9}{2}$$

$$N_2\left(\frac{1}{3}\right) = 1 = c_2 \left(\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{2}{3} \right)$$

$$c_2 = \frac{27}{2}$$

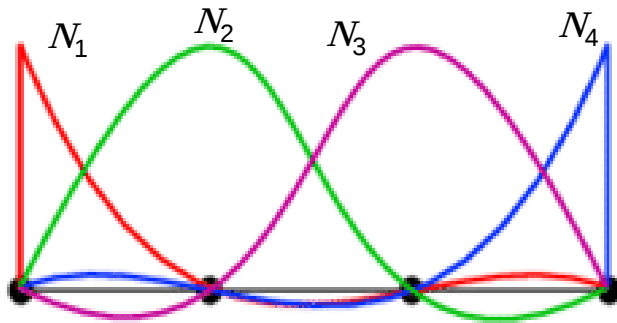
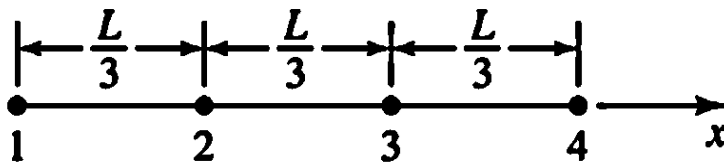
$$N_3\left(\frac{2}{3}\right) = 1 = c_3 \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$c_3 = -\frac{27}{2}$$

$$N_4(1) = 1 = c_4(1) \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$c_4 = \frac{9}{2}$$

مثال ۱



$$N_1(s) = -\frac{9}{2} \left(s - \frac{1}{3} \right) \left(s - \frac{2}{3} \right) (s - 1)$$

$$N_2(s) = \frac{27}{2} s \left(s - \frac{2}{3} \right) (s - 1)$$

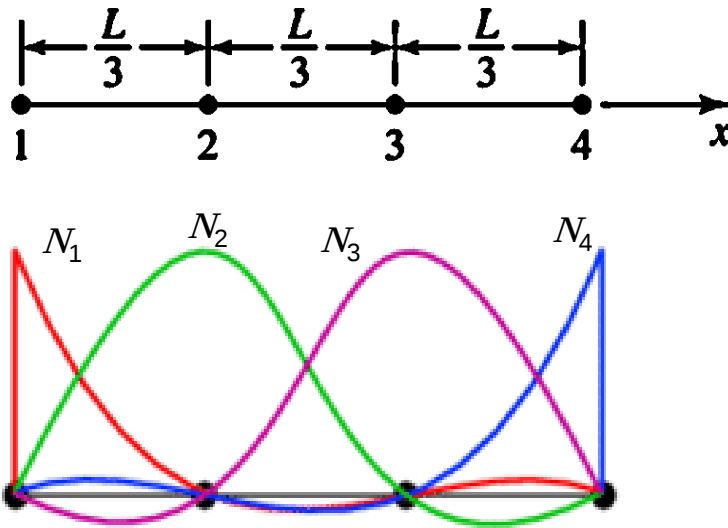
$$N_3(s) = -\frac{27}{2} s \left(s - \frac{1}{3} \right) (s - 1)$$

$$N_4(s) = \frac{9}{2} s \left(s - \frac{1}{3} \right) \left(s - \frac{2}{3} \right)$$

مثال ۱

استخراج توابع درونیاب برای پیوستگی C^0

با استفاده از توابع لاگرانژ:



$$N_j(s) = L_j(s)$$

$$L_j(s) = \prod_{i=1, i \neq j}^n \frac{s - s_i}{s_j - s_i}$$

$$N_1(s) = \frac{(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)}$$

فرم‌های چند جمله‌ای: همسانی هندسی

برای تأمین شرط تمامیت در المان‌های یک بعدی، نمایش چند جمله‌ای برای یک المان M درجه آزادی باید شامل همه توان‌های متغیر مستقل تا مرتبه $M-1$ باشد. یعنی **چند جمله‌ای کامل** باشد.

اگر نمایش‌های چند جمله‌ای متغیر میدانی در دو و سه بُعد از خاصیت **همسانی هندسی** برخوردار باشد، در این صورت شرایط سازگاری و تمامیت را ارضا می‌کنند.

یک تابع ریاضی در صورتی دارای **همسانی هندسی** می‌باشد که با انتقال یا چرخش مختصات تغییری در فرم تابع ایجاد نگردد. به عبارت دیگر، هر یک از متغیرهای مستقل باید دارای نقش برابر در تابع باشند.

فرم های چند جمله ای: همسانی هندسی

در دو بعد، یک چند جمله ای کامل مرتبه M را می توان به صورت زیر بیان کرد

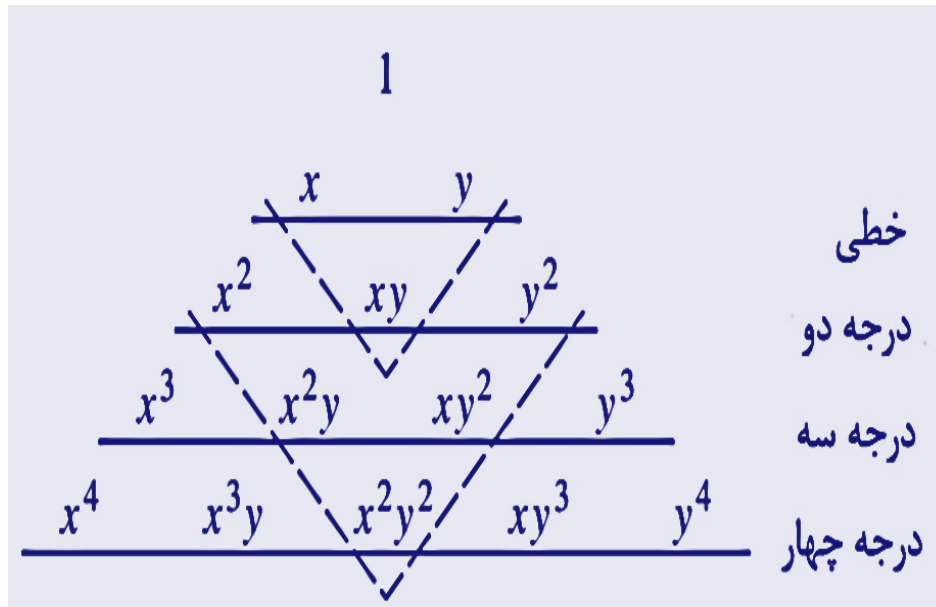
$$P_M(x, y) = \sum_{k=0}^{N_t^{(2)}} a_k x^i y^j \quad i + j \leq M$$

$$N_t^{(2)} = [(M + 1)(M + 2)]/2$$

تعداد کل جملات:

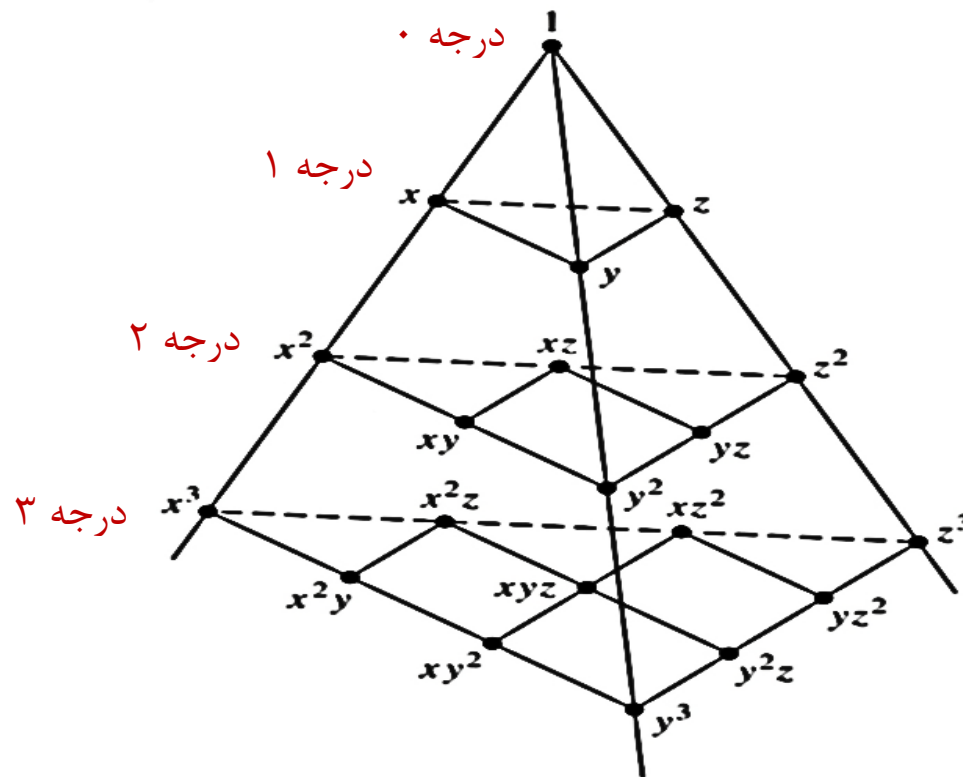
به عنوان مثال اگر در یک مسئله اجزای محدود از چند جمله ای درجه دوم کامل برای درون یابی متغیر میدان استفاده شود، به شش درجه آزادی گرهی در المان نیاز است.

فرم های چند جمله ای: همسانی هندسی



مثلث خیام-پاسکال برای چند جمله ای ها در فضای دو بعدی

فرم های چند جمله ای: همسانی هندسی



هرم پاسکال برای چند جمله ای ها در فضای سه بعدی

فرم های چند جمله ای: همسانی هندسی

چند جمله ای ناکامل نیز در صورت تقارن دارای همسانی هندسی می باشد.

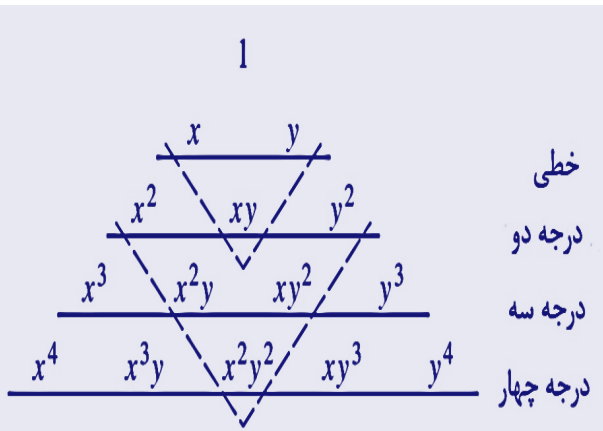
چهار جمله ای درجه دوم ناکامل زیر متقارن نیست

$$P(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2$$

در حالی که چند جمله ای درجه دوم ناکامل زیر متقارن است

$$P(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

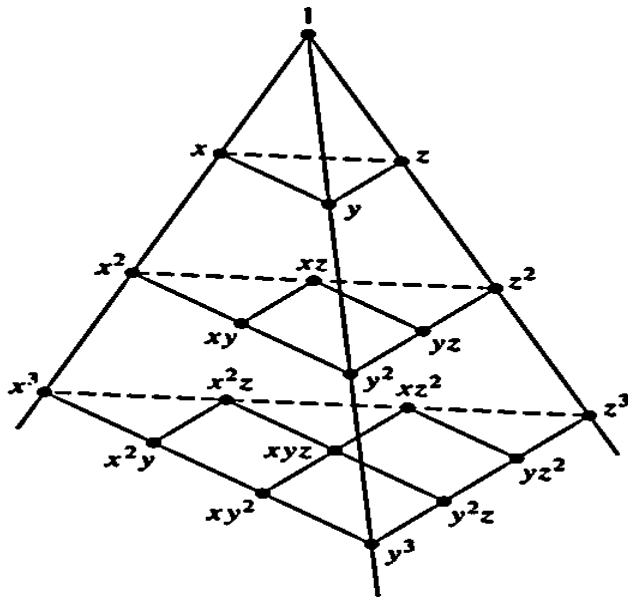
از مثلث خیام-پاسکال می توان برخی چند جمله ای های ناکامل اما متقارن رایج با مرتبه مشخص را تشخیص داد.



فرم های چند جمله ای: همسانی هندسی

چند جمله ای ناکامل نیز در صورت تقارن دارای همسانی هندسی می باشد.

چند جمله ای درجه دوم کامل زیر برای المان ۱۰ درجه آزادی در فضای سه بعدی مناسب است:



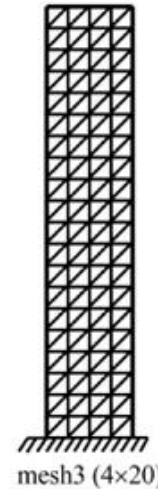
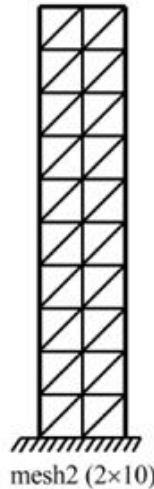
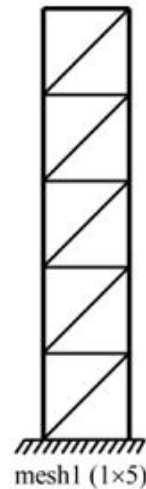
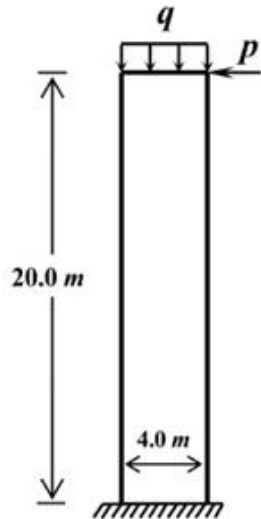
$$P(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz$$

فرم های ناکامل اما متقارن زیر را می توان برای المان ۷ درجه آزادی استفاده کرد:

$$P(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2$$

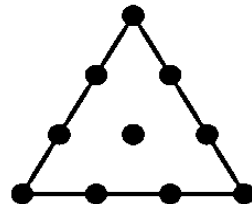
$$P(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz$$

المان های مثلثی

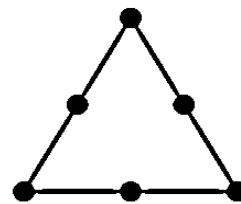


مدلسازی دیوار برشی
با المان های مثلثی:

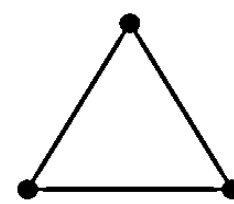
Latin American Journal of Solids and Structures



(ج)



(ب)

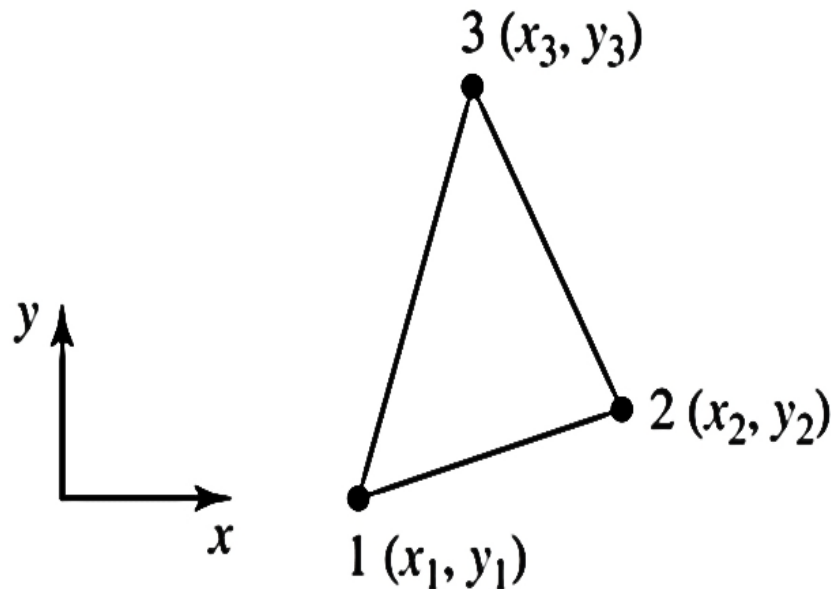


(الف)

المان مثلثی: (الف) سه گرهی خطی، (ب) شش گرهی درجه دو، (ج) ده گرهی درجه سه

المان مثلثی سه گرهی

$$\phi(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$$



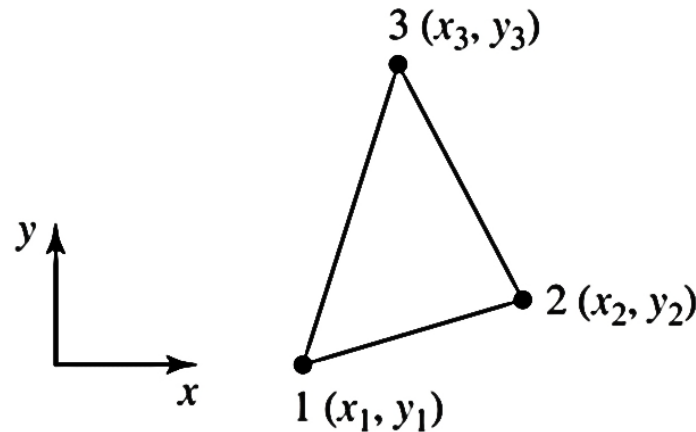
$$\phi(x_1, y_1) = \phi_1$$

$$\phi(x_2, y_2) = \phi_2$$

$$\phi(x_3, y_3) = \phi_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

المان مثلثی سه گرهی



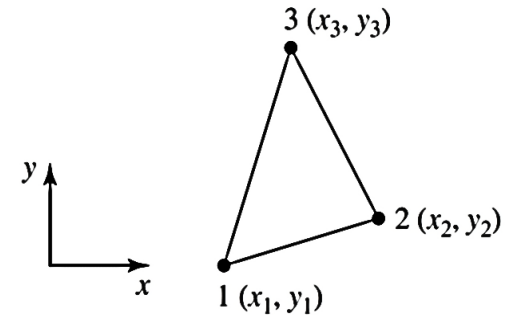
$$a_0 = \frac{1}{2A} [\phi_1(x_2y_3 - x_3y_2) + \phi_2(x_3y_1 - x_1y_3) + \phi_3(x_1y_2 - x_2y_1)]$$

$$a_1 = \frac{1}{2A} [\phi_1(y_2 - y_3) + \phi_2(y_3 - y_1) + \phi_3(y_1 - y_2)]$$

$$a_2 = \frac{1}{2A} [\phi_1(x_3 - x_2) + \phi_2(x_1 - x_3) + \phi_3(x_2 - x_1)]$$

المان مثلثی سه گرهی

$$\phi(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$$



$$\phi(x, y) = \frac{1}{2A} \left\{ \begin{aligned} &[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]\phi_1 \\ &+ [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]\phi_2 \\ &+ [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]\phi_3 \end{aligned} \right\}$$

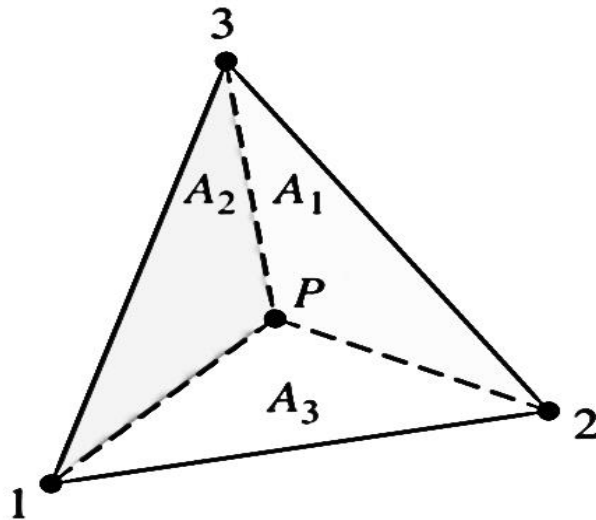
$$N_1(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$\rightarrow N_2(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

المان های مثلثی | محضات سطح



مختصات سطح نقطه P به صورت زیر تعریف می شود

$$L_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A}$$

A : مساحت کل مثلث

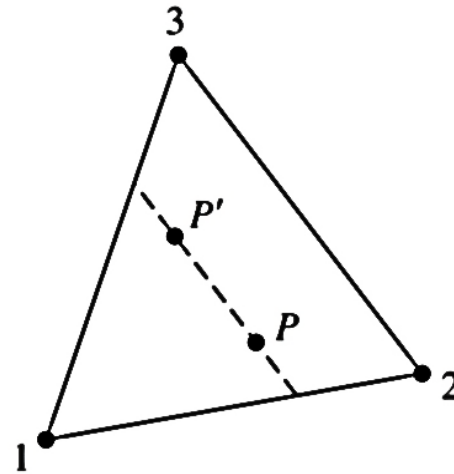
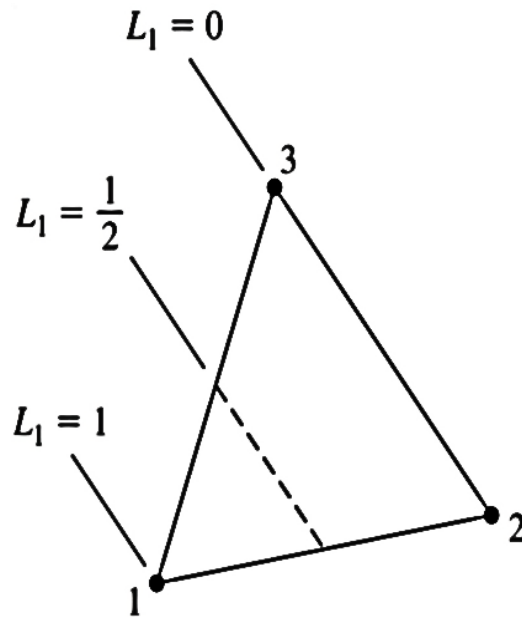
$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

۱ گره : $L_1 = 1$ $L_2 = L_3 = 0$

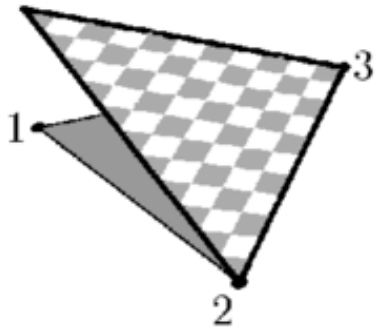
۲ گره : $L_2 = 1$ $L_1 = L_3 = 0$

۳ گره : $L_3 = 1$ $L_1 = L_2 = 0$

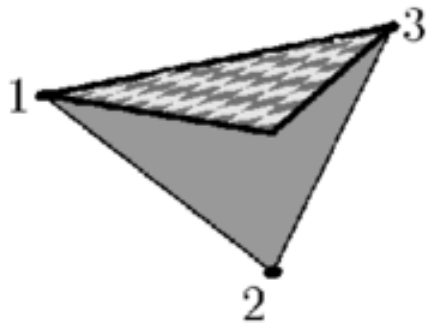
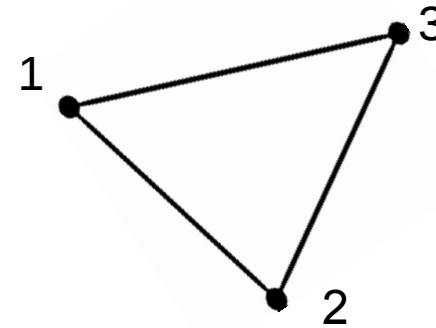
المان های مثلثی | محضات سطح



المان مثلثی سه گرهی

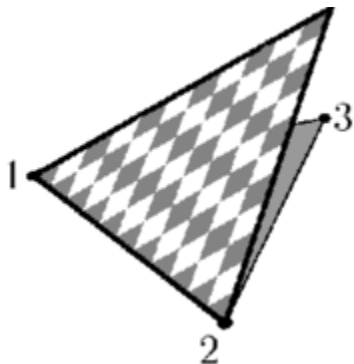


$$N_1 = L_1$$



$$N_2 = L_2$$

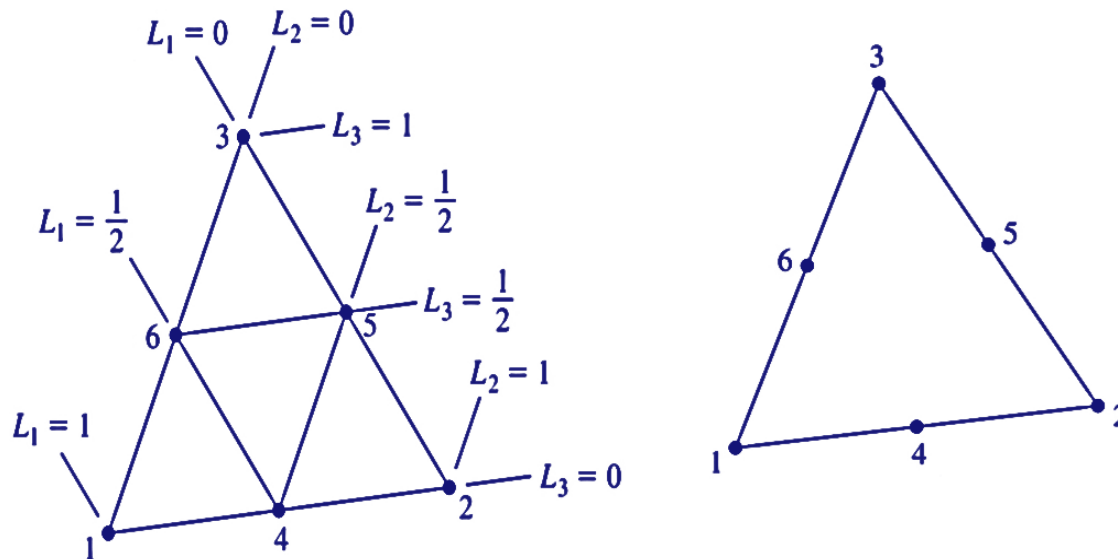
$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i \phi_i$$



$$N_3 = L_3$$

$$\phi(x, y) = L_1 \phi_1 + L_2 \phi_2 + L_3 \phi_3$$

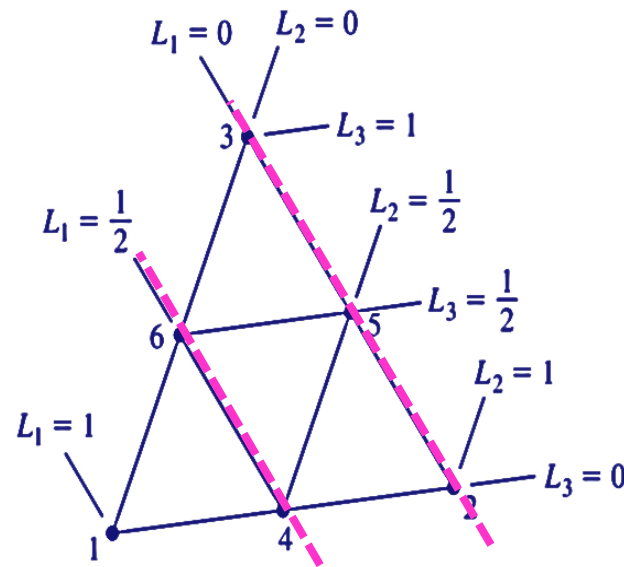
المان مثلثی شش گرهی



$$\phi(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$$

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^6 N_i \phi_i$$

المان مثلثی شش گرهی

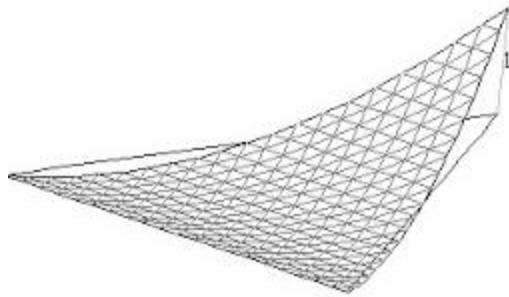


$$N_1 = C_1 L_1 \left(L_1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$N_1(\text{Node 1}) = 1 \rightarrow C_1(1) \left(\frac{1}{2} \right) = 1 \rightarrow C_1 = 2$$

$$N_1 = 2 L_1 \left(L_1 - \frac{1}{2} \right) = L_1 (2L_1 - 1)$$

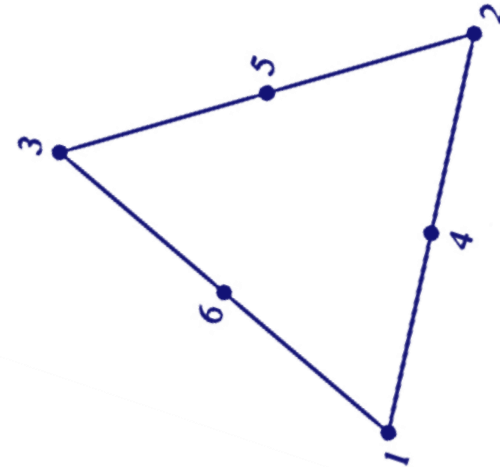
المان مثلثی شش گرهی



$$N_2 = L_2(2L_2 - 1)$$



$$N_4 = 4L_1L_2$$



$$\phi(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$$

انتگرال گیری مختصات سطح

هنگامی که از مختصات سطح استفاده می شود، اغلب باید انتگرال هایی به فرم زیر ارزیابی شوند

$$\iint_A L_1^a L_2^b L_3^c dA$$

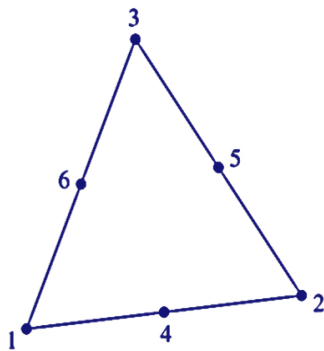
A مساحت کل مثلث ایجاد شده به وسیله گره های ۱، ۲ و ۳ می باشد.

برای تمام توان های صحیح مثبت a ، b و c رابطه زیر برقرار است:

$$\iint_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = (2A) \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!}$$

مثال ۲

درایه‌های ماتریس سختی المان انتقال حرارت دو بعدی به فرم زیر می‌باشند:

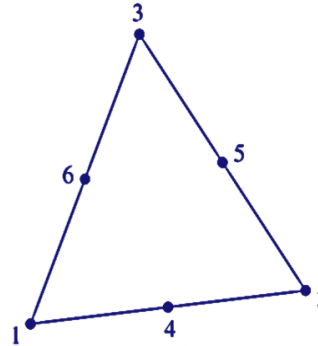


$$k_{ij} = \int_A h N_i N_j dA$$

که h ضریب انتقال حرارت و A مساحت المان می‌باشد. با استفاده از توابع درونیاب المان مثلثی شش گرهی که در رابطه فوق آورده شده‌اند، k_{24} را محاسبه کنید.

مثال ۲

حل:



$$N_2 = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

$$k_{24} = h \int_A L_2(2L_2 - 1)4L_1L_2 dA = h \int_A (8L_1L_2^3 - 4L_1L_2^2) dA$$

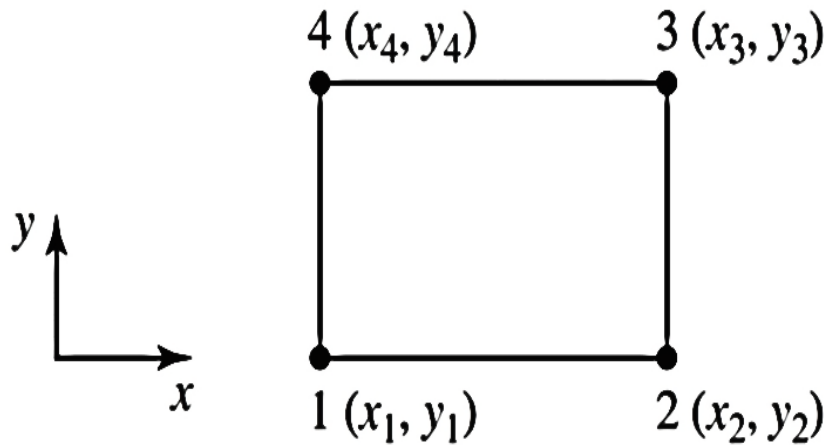
$$h \int_A 8L_1L_2^3 dA = 8h(2A) \frac{(1!)(3!)(0!)}{(1+3+0+2)!} = \frac{96hA}{720} = \frac{2hA}{15}$$

$$h \int_A 4L_1L_2^2 dA = 4h(2A) \frac{(1!)(2!)(0!)}{(1+2+0+2)!} = \frac{16hA}{120} = \frac{2hA}{15}$$

$$k_{24} = \frac{2hA}{15} - \frac{2hA}{15} = 0$$

المان مستطیلی چهارگره‌ای

در المان چهارضلعی از یک چند جمله‌ای ناکامل متقارن برای فراهم کردن شرط همسانی هندسی استفاده می‌شود.



$$\phi(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

المان مستطیلی چهار گرهی

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}$$

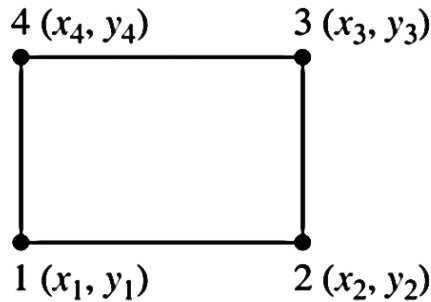
$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy \\ &= [1 \quad x \quad y \quad xy] \{a\} \end{aligned}$$

با اعمال چهار شرط گرهی و نوشتن نتایج در فرم ماتریسی، رابطه زیر حاصل می شود

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}$$

المان مستطیلی چهارگانه



متغیر میدانی:

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= [1 \quad x \quad y \quad xy] \{a\} \\ &= [1 \quad x \quad y \quad xy] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

از این رابطه توابع درونیاب را می توان استخراج کرد.

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i \phi_i$$

المان مستطیلی چهارگانه

برای المان مستطیل شکل، مختصات نرمال شده r و s (که با عنوان **مختصات طبیعی** نیز شناخته می شود) را می توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$r = \frac{x - \bar{x}}{a}$$

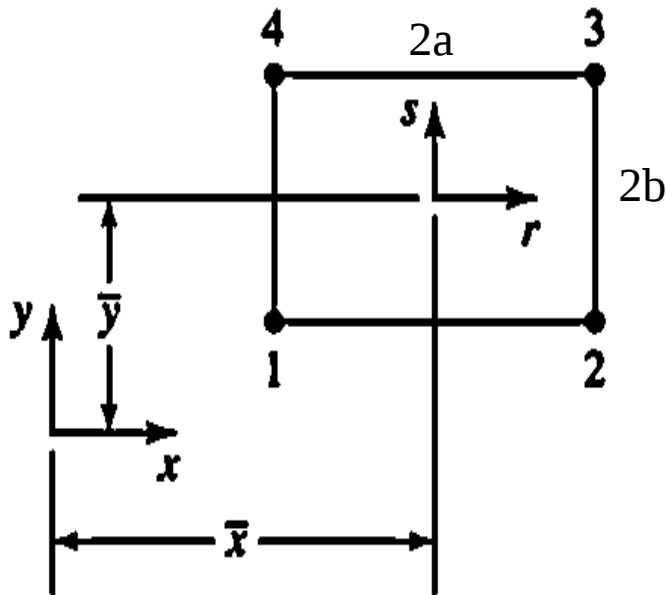
$$s = \frac{y - \bar{y}}{b}$$

$2a$ و $2b$ به ترتیب عرض و طول مستطیل هستند، و مختصات مرکز نیز به صورت زیر بیان می گردد.

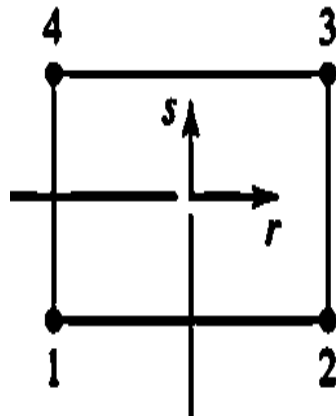
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_4}{2}$$

r و s در بازه -1 تا $+1$ قرار دارند.



المان مستطیلی چهارگره‌ای



با اعمال شرایطی که توسط هر تابع درونیاب در هر گره باید ارضا شود، توابع درونیاب به صورت زیر به دست می آیند:

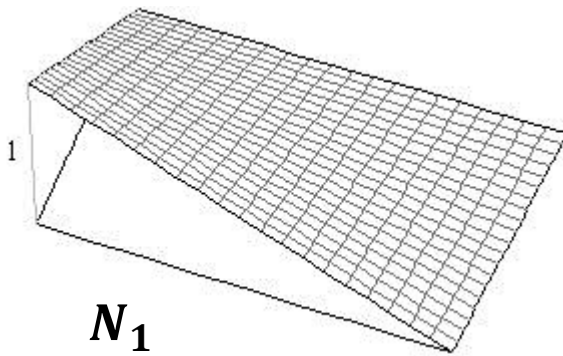
$$\phi(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i \phi_i$$

$$N_1(r, s) = \frac{1}{4}(1 - r)(1 - s)$$

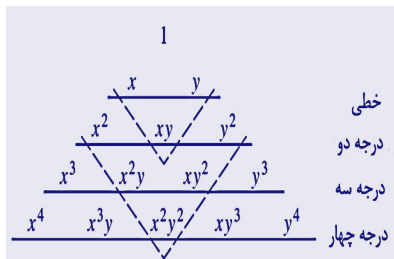
$$N_2(r, s) = \frac{1}{4}(1 + r)(1 - s)$$

$$N_3(r, s) = \frac{1}{4}(1 + r)(1 + s)$$

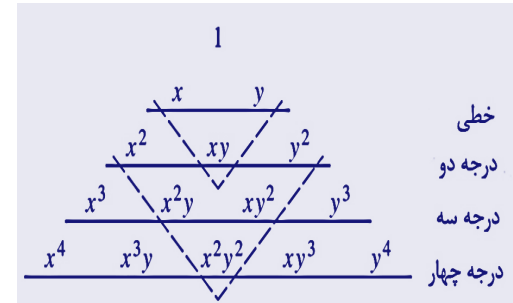
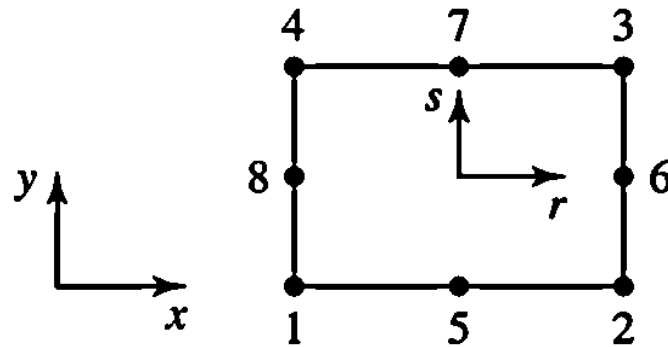
$$N_4(r, s) = \frac{1}{4}(1 - r)(1 + s)$$



visualfea.com



المان مستطیلی، هشت گرهی

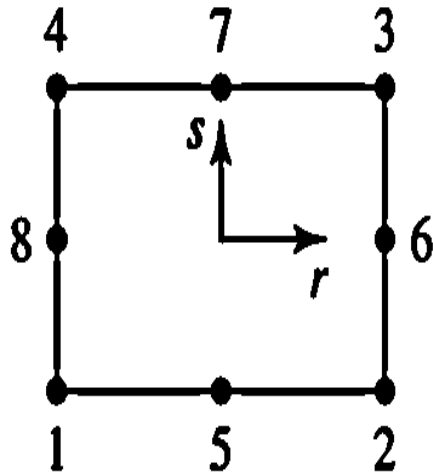


المان مستطیلی مرتبه بالاتر، به نحوی است که گره اضافی در وسط هر ضلع المان قرار بگیرد. هر دو انتخاب زیر، شرایط همسانی هندسی را دارا هستند:

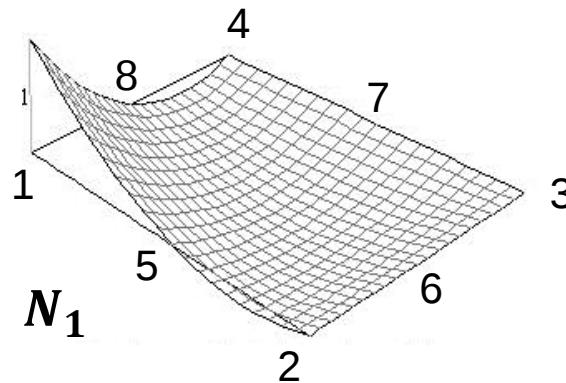
$$\phi(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7y^3$$

$$\phi(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2$$

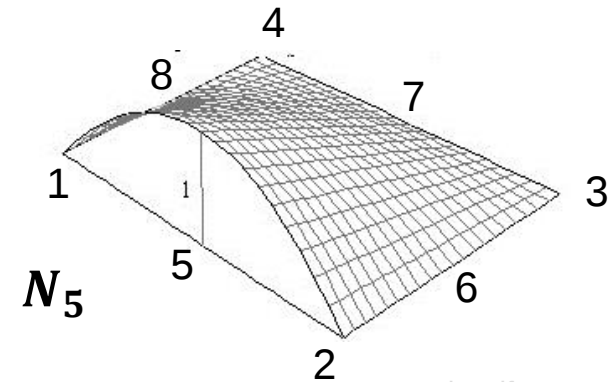
المان مستطیلی، هشت گرهی



می توان با استفاده از مختصات طبیعی، انتخاب مناسب تر را به دست آورد.



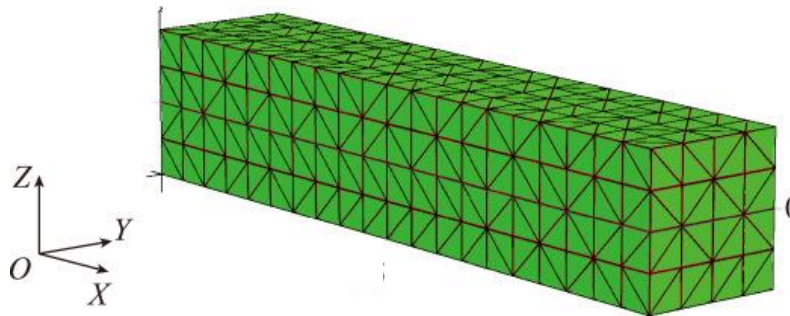
$$N_1(r, s) = \frac{1}{4}(r - 1)(1 - s)(r + s + 1)$$



$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - r)(1 + r)(1 - s) = \frac{1}{2}(1 - r^2)(1 - s)$$

visualfea.com

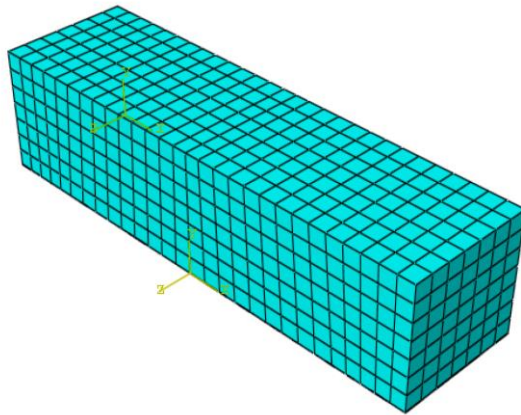
المان های سه بعدی



المان هرمی :

حاصل توسعه‌ی المان مثلثی

A Julia-based Open-source Package of Parallel Smoothed ...



المان متوازی السطوح (المان آجری) :

حاصل توسعه‌ی المان مستطیلی

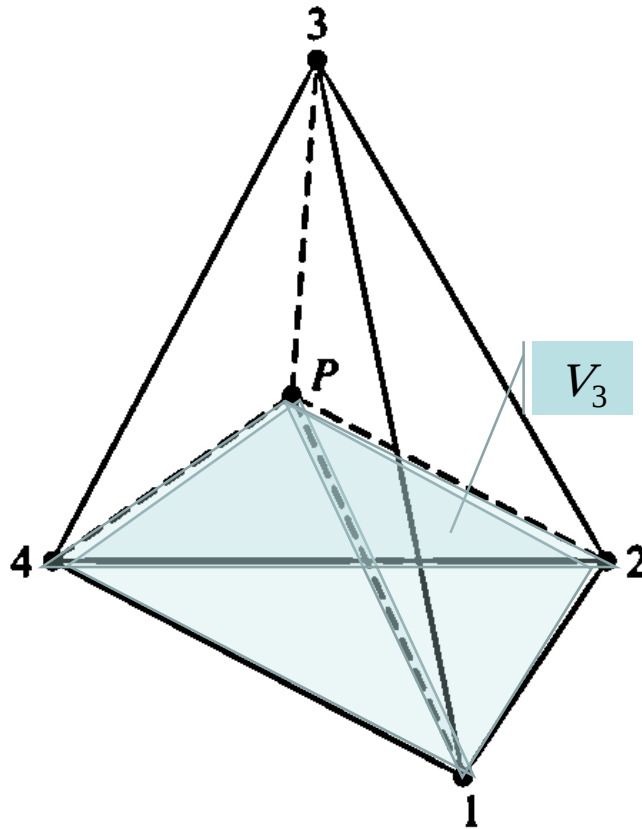
Modeling the Behavior of CFRP Strengthened Concrete Beams ...

المان هرمی | محصولات حجم

دشواری روش های جبری برای به دست آوردن توابع درونیاب برای حالت سه بعدی



استفاده از رویکرد موثرتر **محصولات طبیعی** برای توسعه ی توابع درونیاب



V : حجم کل المان

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

مختصه های حجم:

$$L_1 = \frac{V_1}{V}$$

$$L_2 = \frac{V_2}{V}$$

$$L_3 = \frac{V_3}{V}$$

$$L_4 = \frac{V_4}{V}$$

$$V_1 = \text{vol}(P234)$$

$$V_2 = \text{vol}(P134)$$

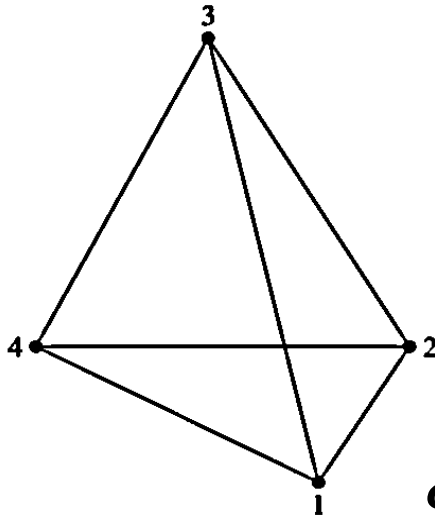
$$V_3 = \text{vol}(P124)$$

$$V_4 = \text{vol}(P123)$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V$$

$$\Rightarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$$

المان هرمی چهارگانه



$$\phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 N_i \phi_i$$

$$L_1 = \frac{V_1}{V}$$

$$L_2 = \frac{V_2}{V}$$

$$L_3 = \frac{V_3}{V}$$

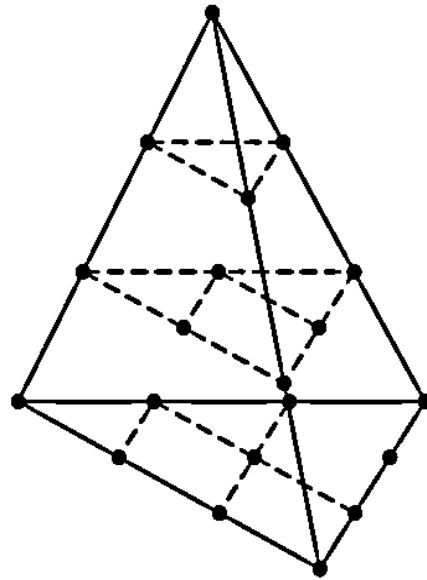
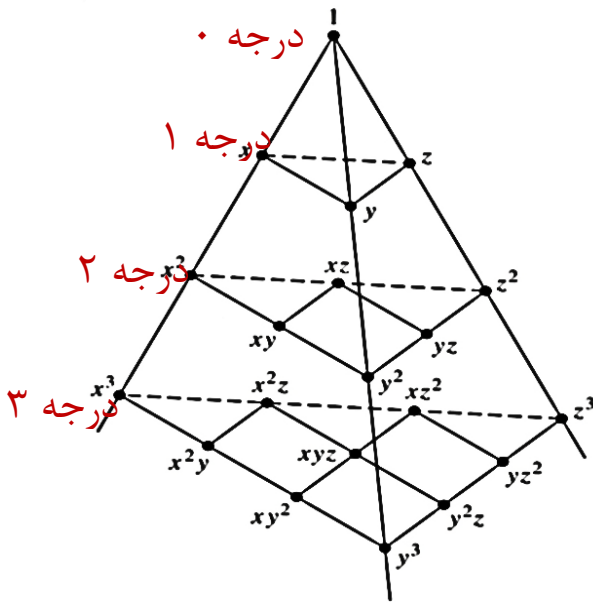
$$L_4 = \frac{V_4}{V}$$

$$\phi(x, y, z) = L_1 \phi_1 + L_2 \phi_2 + L_3 \phi_3 + L_4 \phi_4$$

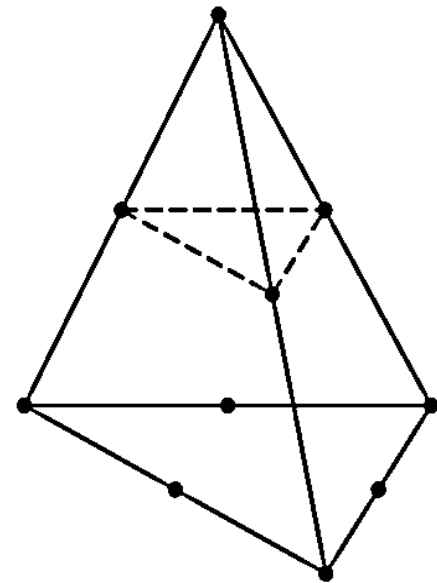
$$\iiint_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} (6V)$$

انتگرال گیری مختصات حجم:

المان هرمی مرتبه بالاتر



(ب)



(الف)

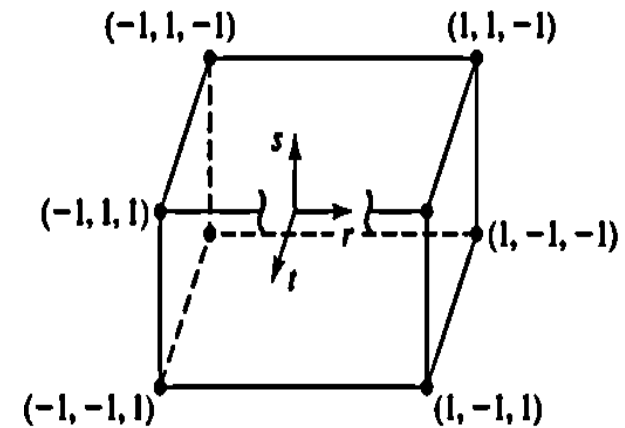
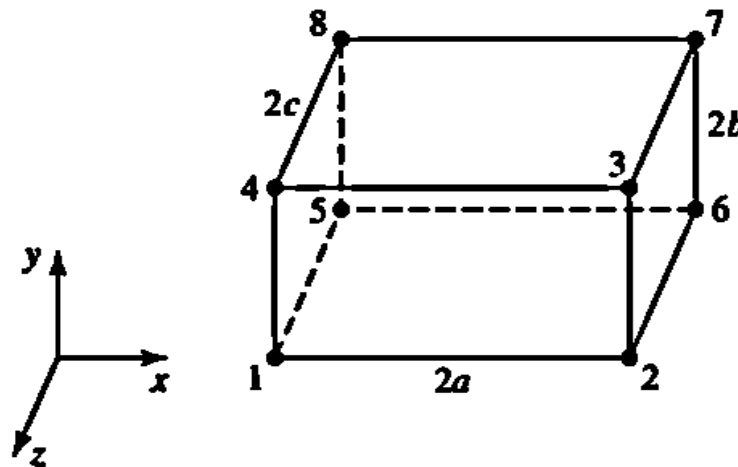
المان‌های هرمی با مرتبه بالاتر: (الف) ده گرهی.
(ب) بیست گرهی

محسسات طبیعی المان آجری

$$\bar{x} = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_3 + y_2}{2}$$

$$\bar{z} = \frac{z_5 + z_1}{2}$$



$$r = \frac{x - \bar{x}}{a}$$

$$s = \frac{y - \bar{y}}{b}$$

$$t = \frac{z - \bar{z}}{c}$$

از محسسات طبیعی r, s, t برای تعریف

توابع درون یاب استفاده می گردد.

المان آجری، هشت کره‌ای

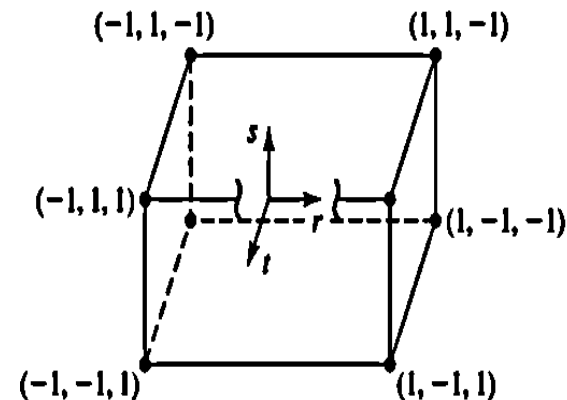
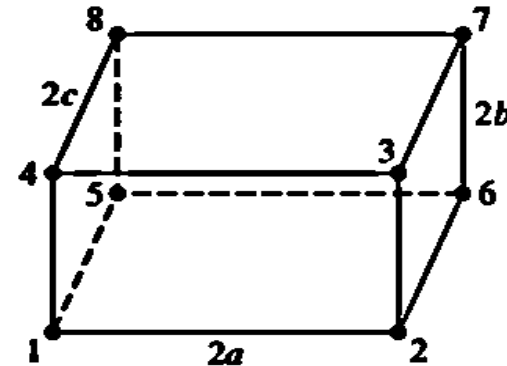
$$N_1 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$$

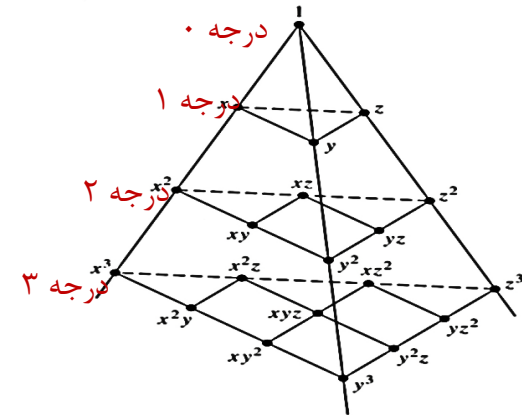
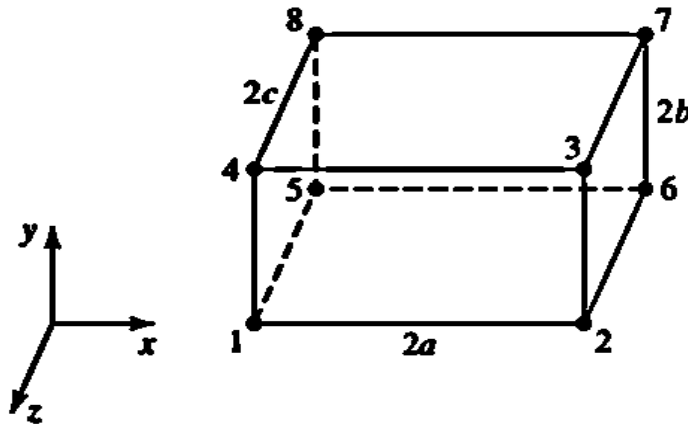
$$N_3 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)$$

$$\phi(r, s, t) = \sum_{i=1}^8 N_i(r, s, t) \phi_i$$



المان آجری هشت گرهی



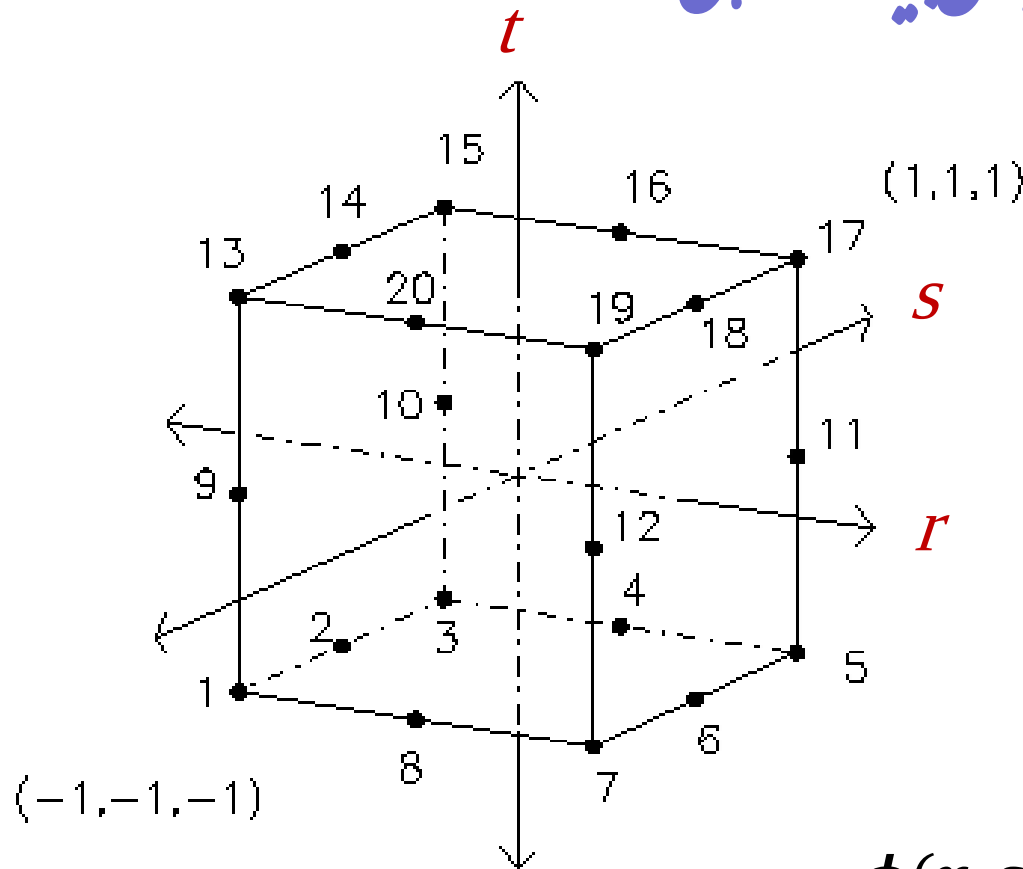
بر حسب مختصات دکارتی

$$\phi(x, y, z)$$

$$= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = a_1 + a_4y + a_5z + a_7yz$$

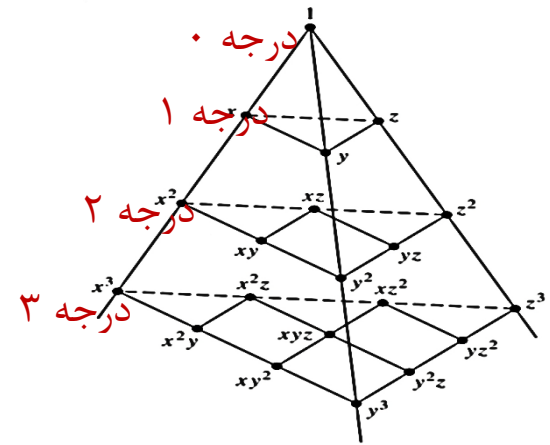
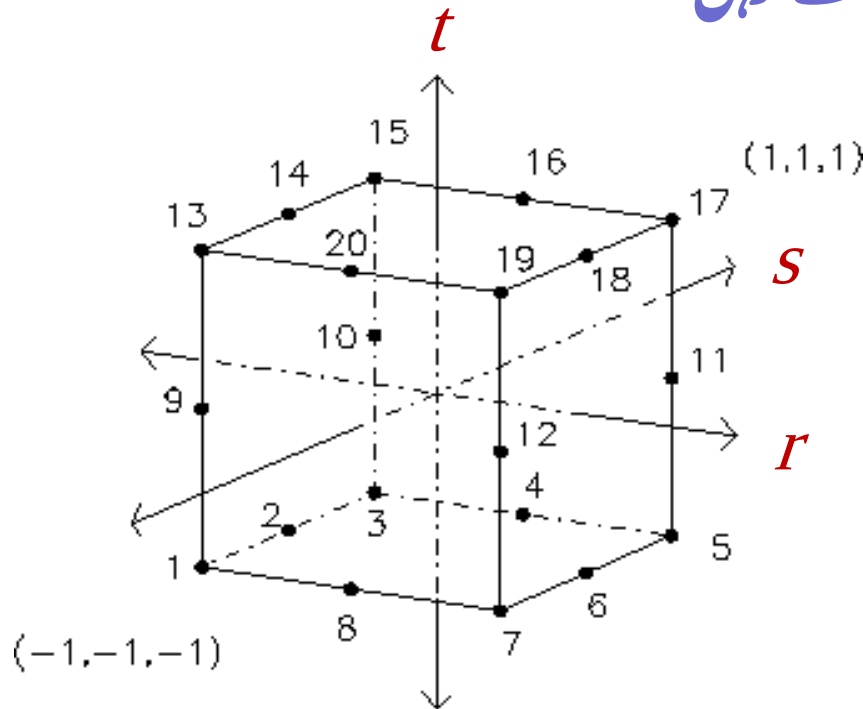
المان آجری-میت کره‌ای



بر حسب مختصات طبیعی

$$\phi(r, s, t) = \sum_{i=1}^{20} N_i(r, s, t) \phi_i$$

المان آبجری است کره‌ای



بر حسب مختصات طبیعی

$$\phi(r, s, t) = \sum_{i=1}^{20} N_i(r, s, t) \phi_i$$

برای گره های واقع در رأس مکعب:

$$N_i(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + rr_i)(1 + ss_i) (1 + tt_i)(rr_i + ss_i + tt_i - 2)$$

برای گره های واقع بر روی اضلاع مکعب،

بطور نمونه برای گره های ۴، ۸، ۱۶ و ۲۰ که در آنها $r_i = 0, s_i = \mp 1, t_i = \mp 1$

$$N_i(r, s, t) = \frac{1}{4} (1 - r^2)(1 + ss_i) (1 + tt_i)$$

مقادیر r_i, s_i و t_i مختصات گره i ام اند.